

Трёхмерные измерения

Время

Качественные

Систематические

Случайные

Информационные

Методические

1. Цена деления
(что $\frac{1}{2}$ для извещ.)

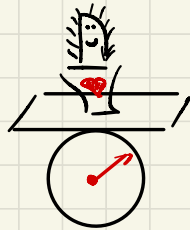
1. Взаимодействие
м/у приборами

2. Число разрядов
(по паспорту)

2. Теор. модель $\frac{1}{3}$
результата

Систематическую погрешн. иногда можно
превратить в случайную.

Пример: Взвешиваем КАРТУС на разных весах

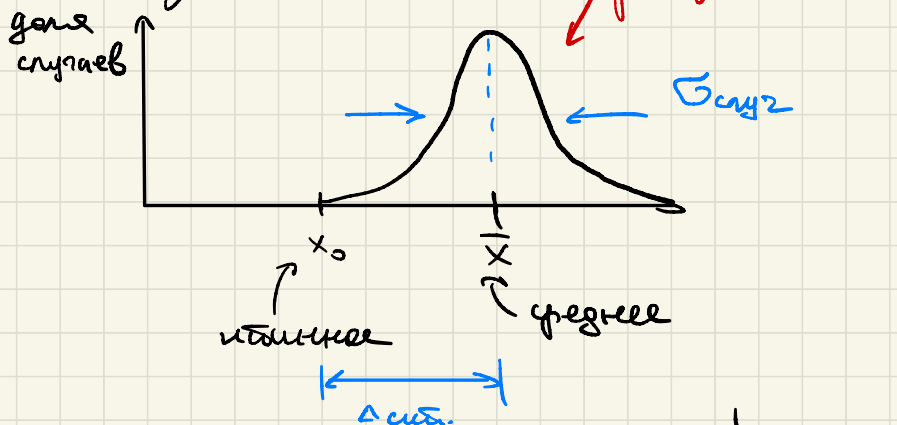


↓ Разность м/у номинальным и
использованным зн-нием

ΔX - абс. погрешность, $\varepsilon = \frac{\Delta X}{X}$ - относ. погрешность

$$\Delta X_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2 + \dots + (x_n - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}}, \text{ где } \langle x \rangle = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n} - \text{ср. знач.}$$

Сложение погрешностей:



$$\Delta X = \bar{X} - x_0 + \Delta X_{\text{случ}} \quad \downarrow \text{const}$$

$$\overline{(\Delta X)^2} = \overline{(\bar{X} - x_0 + \Delta X_{\text{случ}})^2} = \overline{\underbrace{(\bar{X} - x_0)^2}_{\Delta \text{случ}^2} + 2(\bar{X} - x_0)\underbrace{\Delta X_{\text{случ}}}_{\text{const}} + \underbrace{\Delta X_{\text{случ}}^2}_{\text{Бслуч}^2}}$$

/ в силу симметрии отклонения

$$\Delta_{\text{полн}} = \sqrt{\Delta \text{случ}^2 + \text{Бслуч}^2} > \Delta \text{случ}$$

Сколько раз нужно провести измерение?

Чтобы ошибка уменьшилась до $\text{Бслуч} < \Delta \text{случ}$

Вероятность: $c = (3,0 \pm 0,1) \cdot 10^8 \text{ м/с}$ $\varepsilon = 3\%$

$[2,9, 3,1]$ - наиболее вероятный интервал

$P = 0,68$ - опис., $\sqrt{68\%}$ измерений попадают в указ. интервал

$P = 0,95$ - в технике

$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_x}{N}$, N_x - число попаданий в нужный интервал, N - число испытаний, т.е.

P - доля случаев. $\left| \frac{\cdot}{\cdot} \right| \leftarrow \frac{1}{6}$ опред

теор. модель

Вероятность того, что результат эки.

$3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с} \rightarrow \text{к 0}$. Значит нужно сделать нахождение в интервал



$\frac{P(x, \Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} w(x)$ - теоретическая вероятность -
- площадь под графиком вероятности; $P = \int w(x) dx$

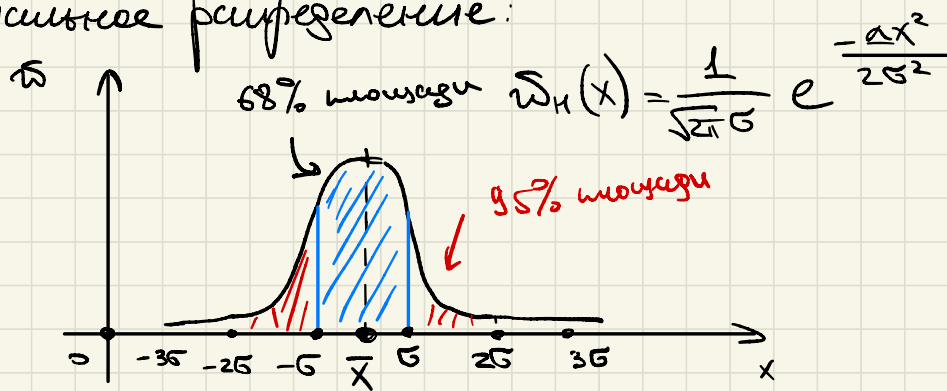
В физ. экспериментах влияние оказывает
много факторов (век. изм. темп., влажность, ...)

Если все они независимы, то итоговая величина

X распределена по Гауссу:

$$X = \sum_{i=1}^N \xi_i, \quad \xi_i - \text{независ.}, \quad N \gg 1.$$

Нормальное распределение:



Погрешность косвенных измерений:

$$f = f(x, y, z, t, \dots)$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \dots}$$

$$\begin{aligned} \frac{I}{R} &= \frac{U}{R} \\ \Delta \frac{I}{R} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{I}{R}}{\partial U}\right)^2 \Delta U^2 + \left(\frac{\partial \frac{I}{R}}{\partial R}\right)^2 \Delta R^2} = \\ &= \sqrt{\frac{\Delta U^2}{R^2} + \frac{\Delta R^2}{R^2}} = \frac{1}{R} \sqrt{\Delta U^2 + \Delta R^2} \end{aligned}$$

Проверка теор. зависимостей:

Данные: $\{y_i, x_i\}, i = 1, \vec{N}$

Модель: $y = f\{x, \theta\}$

$\bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ m -параметр

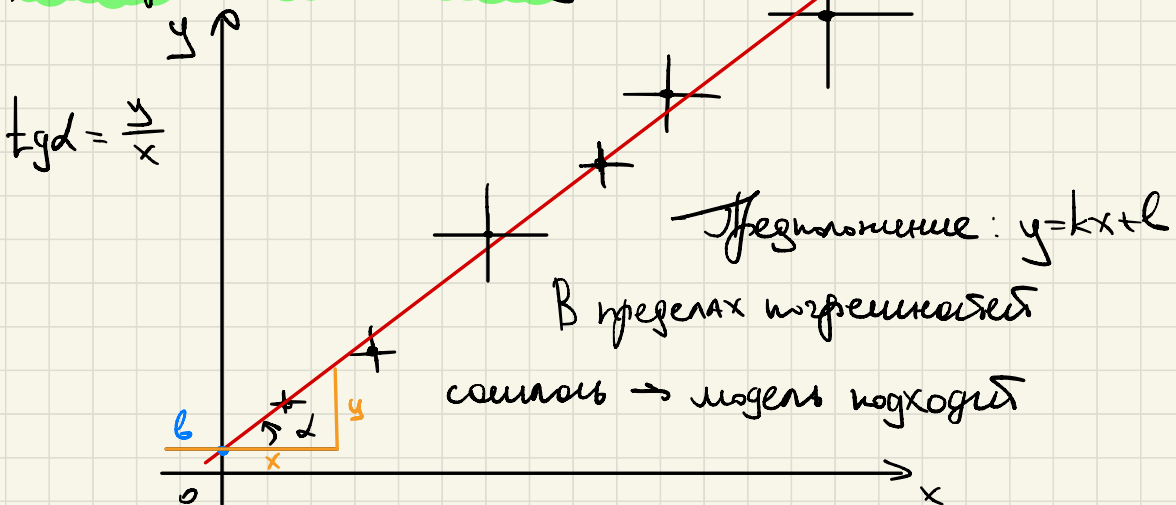
Например, 3-я ОМА: $U = \mathbb{R}, m = 1$

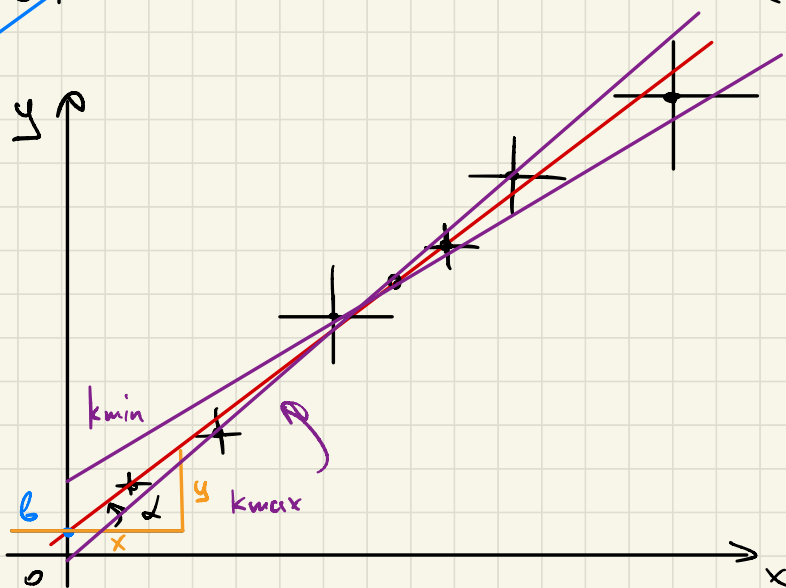
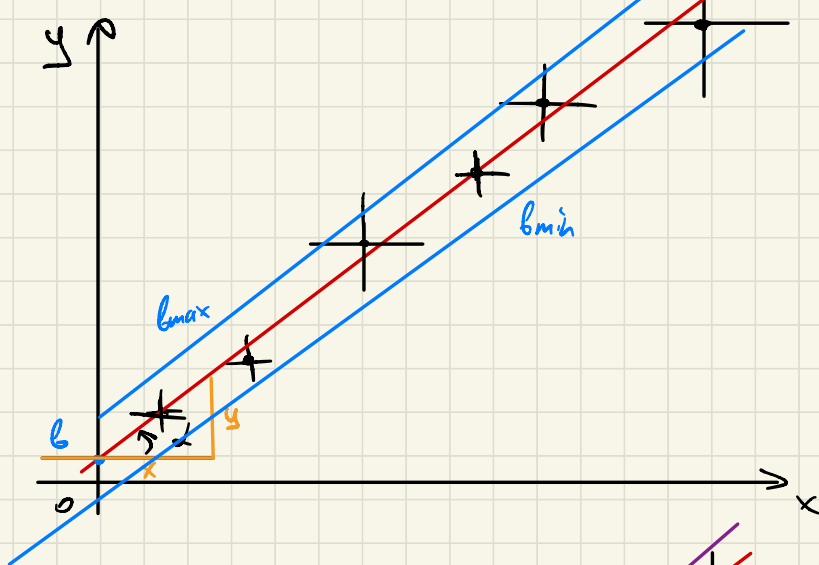
$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, m = 3$

„оценщик“: $\theta(\text{данные}, \text{модель}) \rightarrow \bar{\theta}$

- Проверка совп. теории и экм.: модель $\leftrightarrow$ данные
- Поиск оптимальных пар-ов
- Оценка погрешностей

1. Графический метод

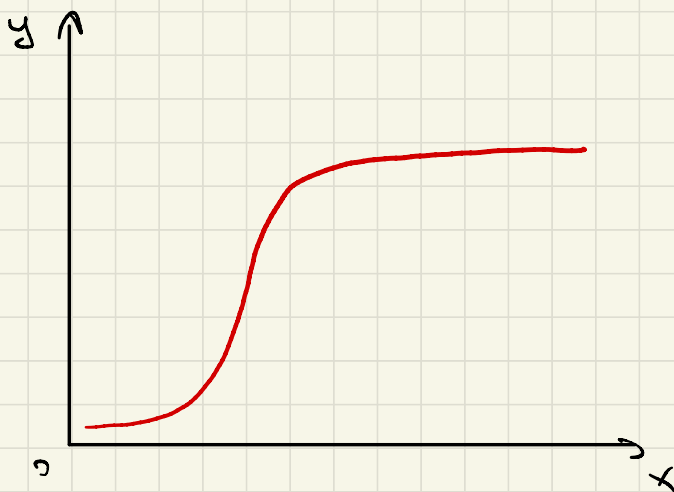




Если погрешность случайная, то:

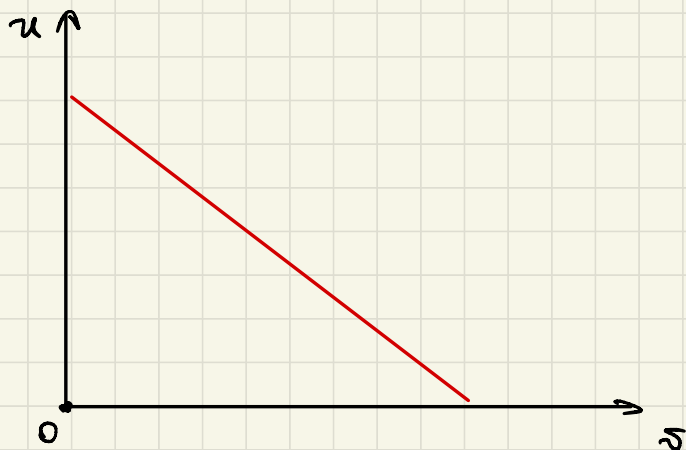
$$\sigma_k = \frac{\Delta k}{\sqrt{N}}, \quad \sigma_b = \frac{\Delta b}{\sqrt{N}}$$

Еще зависимость нелинейная: $y = ae^{-b/x}$

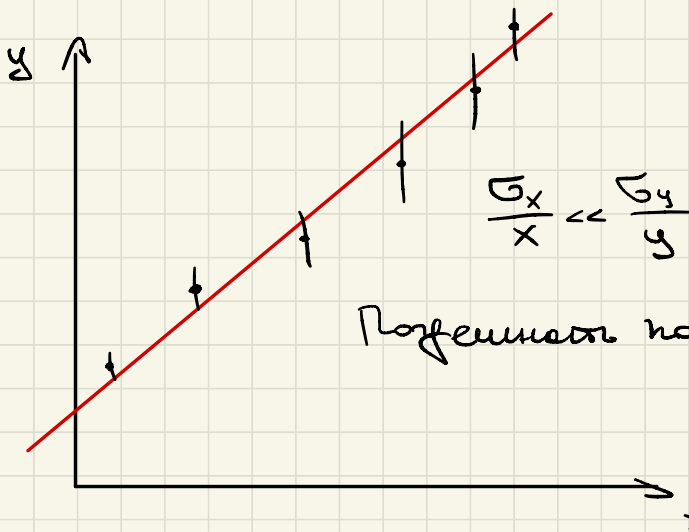


Линеаризация: $u = \ln y$, $\delta = \frac{1}{x}$

$$u = \ln a - b\delta$$



2. Метод ХЧ-квадрат



Запишем откл. эксл. данных от теор. модели:

$$\Delta y_i = \underset{\text{теор.}}{f(x_i, \theta)} - \underset{\text{эксл.}}{y_i}$$

Мы хотим провести прямую так, чтобы в среднем все точки лежали от прямой как можно ближе.

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta y_i^2}{\sigma_i^2} \rightarrow \min$$

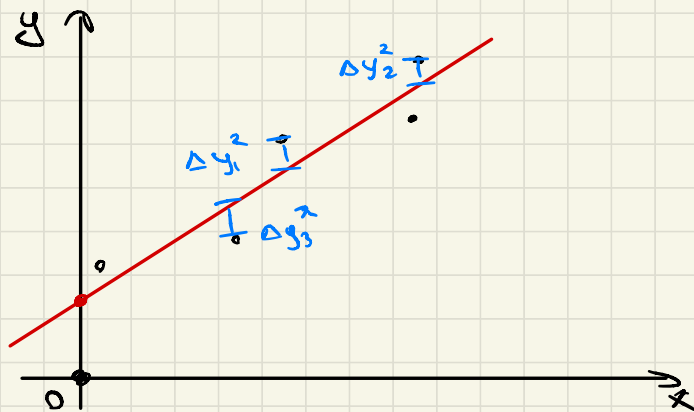
Если параметр один, то $\frac{\partial \chi^2}{\partial \theta} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \chi}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial \theta_2} = 0 \end{array} \right.$

Если больше, то решаем их -ми:

МНК: $\sigma_{y_i} = \text{const}$ или не известны

$S = \sum \Delta y_i^2 \rightarrow \min$ (минимум суммы квадратов отклонений)

Числовой способ метода X_i - квадраты



Метод максимального правдоподобия:

$L = P(\Delta y_1) \cdot P(\Delta y_2) \cdot \dots \cdot P(\Delta y_n)$ при fix $\{x_i\}$, $\{\sigma_i\}$

$L(\theta) \rightarrow \max \rightarrow \theta^*$ - опт. пар-м

Рассчитаем вероятность того, что отклонения могут образоваться случайными факторами

Т.к. незавн., то произведение вероятностей

• Норм. расп.: $P(\Delta y) \propto e^{-\Delta y^2 / 2\sigma_i^2}$

$$L = \text{const} \cdot \exp\left(-\sum \frac{\Delta y_i^2}{2\sigma_i^2}\right) = e^{-\chi^2/2} \rightarrow \max L \text{ совп.}$$

$\min \chi^2$

Ищем наилучший вариант:

$$y = kx$$

• χ^2 : $\chi^2 = \sum w_i \Delta y_i^2$, $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$ — весовый коэффициент

$$\chi^2 = \sum w_i (kx_i - y_i)^2$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial k} = -2 \sum w_i x_i (kx_i - y_i) = 0$$

$$k = \frac{\sum w_i x_i y_i}{\sum w_i x_i^2} = \frac{\langle xy \rangle'}{\langle x^2 \rangle'}$$

Еще мнк: $k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle}$

Взвешенное среднее: $\langle x \rangle' = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$

$$\bullet y = kx + b$$

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle$$

